সেট ও ফাংশন
Sets and Functions

ভূমিকা

Georg Cantor(1845-1918)

সেট ও ফাংশনের ধারণা আপনারা পূর্বে গণিত বইয়ে পেয়েছেন। বস্তুর প্রকারভেদে বস্তুর সমষ্টি বোঝাতে সেট, গুচ্ছ, সংগ্রহ, সমষ্টি, দল, পাল ইত্যাদি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ ব্যবহার করা হয়। সুনির্ধারিত ও পরস্পর ভিন্ন বস্তুসমূহের যে কোনো সংগ্রহকে সেট বলে। গণিত শাস্ত্রের সব শাখায় সেটের প্রচুর ব্যবহার হয়। রুশ-জার্মান গণিতবিদ Georg Cantor(১৮৪৫-১৯১৮) সেট সম্পর্কে প্রথমে ব্যাখ্যা প্রদান করেন। তিঁনি গণিত শাস্ত্রের সেট তত্ত্ব (Set Theory) এর ব্যাখ্যা প্রদান করে ব্যাপক আলোড়ণ সৃষ্টি করেন।

ফাংশন সম্পর্কেও আপনাদের ধারণা রয়েছে। ফাংশন বলতে দুটি সেটের সদস্যদের মধ্যে একটি বিশেষ ধরণের সম্পর্ক বোঝায়। দৈনন্দিন জীবনে আপনারা অন্বয়, ফাংশন শব্দ দুটি প্রতিনিয়ত ব্যবহার করছেন। এই ইউনিটে অপনারা সেটের প্রকারভেদ, ভেনচিত্রের মাধ্যমে সেট, অন্বয় ও বিভিন্ন প্রকার ফাংশন ইত্যাদি বিষয়ে বিষদভাবে জানতে পারবেন।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- বিভিন্ন প্রকার সেট সম্পর্কে লিখতে পারবেন,
- ভেনচিত্রের মাধ্যমে বিভিন্ন প্রকার সেট গঠন করতে পারবেন,
- সেট প্রক্রিয়ার ধর্মাবলী লিখতে পারবেন,
- সেটের ধর্মাবলী ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন,
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন,
- এক-এক ফাংশন, অনটু ফাংশন, বিপরীত ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১.১ সেট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন পদ্ধতিতে সেট গঠন করতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার সেটের বর্ণনা দিতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার সেটের মাধ্যমে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সেট, সার্বিকসেট , পূরক সেট, শক্তি সেট

মূলপাঠ

সেট (Set): দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুসমূহের সুনির্বানির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলে। যেমন, সার্কের (SAARC) অন্তর্ভূক্ত দেশসমূহ।সেটে অন্তর্ভূক্ত বস্তুসমূহকে সেটের উপাদান (element) বা সদস্য (member) বলা হয়। ইংরেজি বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর A, B, C, D, X, Y, Z …….ইত্যাদি দ্বারা সাধারণত সেট প্রকাশ করা হয় এবং সেটের সবগুলো উপাদান দ্বিতীয় { } বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করতে হয় এবং উপাদানগুলোর একটিকে আরএকটি থেকে (,) দ্বারা পৃথক করা হয়। যেমন–
(ক) ১ম পাঁচটি অঋণাত্মক জোড় সংখ্যার সেট, $A=\{2,4,6,8,10\}$
(খ) বাংলা মাসের নামগুলো M দ্বারা নির্দেশ করলে, $M=\{x \mid x=$ বাংলা বারো মাসের নাম$\}$
সেট গঠনের বা প্রকাশের দুটি পদ্ধতি। যথা–তালিকা পদ্ধতি ও বাছাই পদ্ধতি। উপরে উল্লেখিত (ক) ও (খ) যথাক্রমে তালিকা পদ্ধতি ও বাছাই পদ্ধতির উদাহরণ।

সার্বিক সেট (Universal Set) যে কোনো প্রসঙ্গে আলোচনাধীন সকল সেটই কোন নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এ ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট আলোচনাধীন সকল সেটের সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়।
যেমন–
$A=\{x|\ x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $3x \le 22\}$
$B=\{x|\ x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $x^2 \le 50\}$
এবং $C=\{x|\ x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $\sqrt{x} \le 3\}$
এখন, $U=\{x|\ x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট $\}$ বিবেচনা করি।
তাহলে A, B, C হলো U এর উপসেট এবং U কে বলা হয় সার্বিক সেট।

উপসেট (Subset): যদি A সেটের উপাদান B সেটের উপাদান হয় তবে A সেটকে B সেটের উপসেট বলা হয়।
মনে করুন, $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ এবং $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
উপরের সেট থেকে পাই,
A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান $x \in A \Rightarrow x \in B$।
$\therefore A$ সেটটি B সেটের উপসেট, $A \subset B$।
আবার, C সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান।
সুতরাং C সেটকে সেটের B উ পসেট বলা হয় , $C \subseteq B$।
এখানে A এবং C সেটের মধ্যে পার্থক্য রয়েছে ।
যেখানে B এবং C সেটের উপাদানগুলো এবং তার সংখ্যা একই কিন্তু A সেট এবং B সেটের উপাদানগুলোর সংখ্যা সমান নয়। সুতরাং A সেটটি হলো B সেটের প্রকৃত উপসেট এবং লেখা হয় $A \subset B$ ।
যে কোনো সেট P এর জন্য

(i) $\Phi \subseteq P$ (ফাঁকা সেট Φ যেকোনো সেটের উপসেট)
(ii) $P \subseteq P$ (যে কোনো সেট ঐসেটের উপসেট)
(iii) n(P) বলতে P সেটের উপাদান সংখ্যা বোঝায়।
(iv) মনে করুন, P সেট Q সেটের উপাদান আর্থাৎ তখন $P \subseteq Q$ আর্থাৎ $n(P) \leq n(Q)$
(v) মনে করুন, P সেট Q সেটের প্রকৃত উপসেট, অর্থাৎ $P \subset Q$ আর্থাৎ $n(P) < n(Q)$

পূরক সেট (Complementary Set): সার্বিক সেট U এর উপসেট A হলে, A সেটের সদস্য ব্যতীত U সেটের অন্যান্য সদস্যদের নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলা হয় এবং প্রকাশ করা হয় A' বা A^c হিসেবে।
গাণিতিকভাবে, $A' = U \backslash A = \{x: x \in U\ ;\ x \notin A\}$
যেমন − $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ এবং $B = \{2,4,6\}$
সুতরাং, $B' = U \backslash B = \{1,2,3,4,5,6\} \backslash \{2,4,6\} = \{1,3,5\}$
যে কোনো সেট এর A জন্য −
(i) $U' = \Phi$ (ii) $\Phi' = U$ (iii) $A \cup A' = U$ ।
(iv) $A \cap A' = \Phi$ (v) $(A')' = A$

উদাহরণ 1: দেওয়া আছে, $A = \{x: 5x > 19\}$ এবং $B = \{x: 3x < 19\}$ এবং $U = \{x: x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $, 0 \leq x \leq 10\}$ সেট A ও B এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং A' ও B' নির্ণয় করুন।

সমাধান: সার্বিক সেট, $U = \{x: x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা $, 0 \leq x \leq 10\}$
অর্থাৎ, $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$A = \{x: 5x > 19\}$
$\therefore\ A = \{4,5,6,7,8,9,10\}$
$B = \{x: 3x < 19\}$
$\therefore B = \{1,2,3,4,5,6\}$
অতএব, $A' = \{1,2,3\}$
এবং $B' = \{7,8,9,10\}$

শক্তি সেট (Power Set): যে কোনো সেট এর সকল উপসেটকে A সেটের শক্তি সেট বা power সেট বলা হয় । শক্তি সেটকে দ্বারা $P(A)$ প্রকাশ করা হয় ।
যেমন: $A = \{a, b, c\}$ হলে A এর শক্তি সেট,
$P(A) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$
A সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে A এর উপাদান সংখ্যা হবে 2^n ।
এখানে সেট A এর উপাদান সংখ্যা 3, সুতরাং, $P(A) = 2^3 = 8$
যা $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে এবং $P(A)$ এর প্রত্যেকটি উপাদানই A সেটের উপসেট।

উদাহরণ 2 : দেওয়া আছে, $A = \{3,4,5,6\}$, A এর শক্তিসেট নির্ণয় করুন।
সমাধান: A সেটের উপাদান সংখ্যা 4 । সুতরাং মোট উপাদান হবে $2^4 = 16$ টি
অতএব, উপাদানগুলো:
$P(A) = \{\Phi, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}\{4,5\}, \{4,6\}\{5,6\}\{3,4,5\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}, \{3,4,6\}, \{3,4,5,6\}\}$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. দেওয়া আছে, U={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} নিচের সেট দুটি তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং তাদের পূরক সেট নির্ণয় করুন। (ক) $P = \{x: 10 < 3x < 32, x \in Z^+\}$ (খ) $S = \{x: x^3 < 30, x \in Z^+\}$ 2. যদি $A = \{e, f, g\}$ হয়, তবে $P(A)$ নির্ণয় করুন। 3. যদি $B = \{x, y, z, s, t\}$ হয়, তবে $P(A)$ নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- যে কোনো সুনির্ধারিত তালিকা, সংগ্রহ বা শ্রেণীকে সেট বলা হয়।
- সেট প্রকাশ পদ্ধতি দুই প্রকার। যথা– (ক) তালিকা পদ্ধতি (খ) সেট গঠন পদ্ধতি।
- নির্দিষ্ট আলোচনাধীন সকল সেটের সেট সার্বিক সেট বলা হয়।
- যে কোনো সেট A এর সকল উপসেটকে A সেটের শক্তি সেট বলা হয় এবং প্রকাশ করা হয় P(A) ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.১

1. দেওয়া আছে, $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

(ক) $A = \{x: x^2 < 70, x \in Z^+\}$ হলে সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং A' নির্ণয় করুন।

(খ) $B =\{x: x, 2$ এর গুণিতক$\}$ হলে সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং B' নির্ণয় করুন।

(গ) $C = \{x: x + 4 < 10, x \in Z^+\}$ হলে সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং C' নির্ণয় করুন।

(ঘ) প্রাপ্ত সেট সমূহের সম্পর্কের সত্যতা যাচাই করুন:–

$(i)\ A' \subset C\ (ii)\ C' \subset A\ (iii)\ A' \not\subset A\ (iv)\ B' \subset A$

2. যদি $A = \{1,2,3\}$ হয়, তবে $P(A)$ নির্ণয় করুন।

পাঠ ১.২ ভেনচিত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

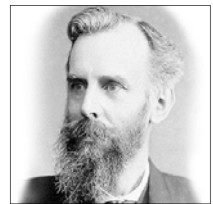
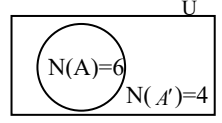
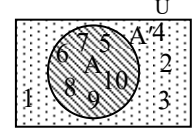
- ভেনচিত্র কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ভেনচিত্রের সাহায্যে সংযোগ সেট দেখাতে পারবেন,
- ভেনচিত্রের সাহায্যে পূরক সেট দেখাতে পারবেন,
- ভেনচিত্রের সাহায্যে ছেদ সেট দেখাতে পারবেন,
- ভেনচিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	ভেনচিত্র, সার্বিকসেট , পূরক সেট, শক্তি সেট

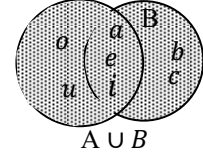
মূলপাঠ

Jhon Venn(1838-1883)

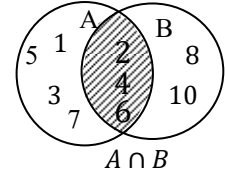
ভেনচিত্র (*Venn Diagram*): সেটেরে সংযোগ, ছেদ, উপসেট,অন্তর, পূরক ইত্যাদি প্রক্রিয়া বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়তকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার মাধ্যমকে ভেনচিত্র বলে। জনভেন (১৮৩৪-১৮৮৩) সর্বপ্রথম সেটের কার্যবিধি জ্যামিতিক চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করেন। তাই তার নাম অনুসারে এ পদ্ধতিটির নাম ভেনচিত্র।সাধারণত আয়তক্ষেত্র হিসেবে সার্বিক সেট, বৃত্তাকার বা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র হিসেবে উপসেট ব্যবহৃত হয়।

নিম্নে ভেনচিত্রের মাধ্যমে সার্বিক সেট $U = \{x:x$ পূর্ণ সংখ্যা $0<x\leq 10\}$

$A = \{x: 3x > 13\}$এবং $A' = \{x: 3x \leq 13\}$ দেখানো হল।
তালিকা পদ্ধতিতে সার্বিক সেট $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
উপসেট $A = \{5,6,7,8,9,10\}$ এবং $A' = \{1,2,3,4\}$।
যদি A যেকোনো সেট এবং U সার্বিক সেট তখন লিখতে পারি $n(A) + n(A') = n(U)$
$N(A)$ বা $n(A)$ দিয়ে ঐ সেটের সদস্যসংখ্যা বুঝায়।

সংযোগ সেট (Union of Sets): দুই বা তার অধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলে। A ও B দুইটি সেট হলে তাদের সংযোগ সেট হবে $A \cup B$ এবং পরতে হবে $A\ Union\ B$
সংযোগ সেট গঠন পদ্ধতি: $A \cup B =\{x: x \in A$ অথবা $x \in B\}$।

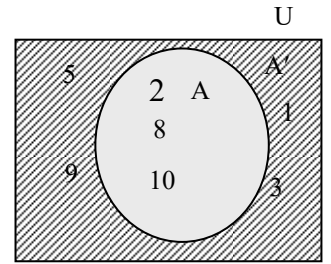
উদাহরণ 1: যদি $A = \{a, e, i, o, u\}$ এবং $B = \{a, b, c, e, i\}$ হলে $A \cup B$ নির্ণয় করুন এবং ভেনচিত্রে দেখান।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{a, e, i, o, u\}$ এবং $B = \{a, b, c, e, i\}$
$\therefore A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \cup \{a, b, c, e, i\}$
$= \{a, b, c, e, i, o, u\}$

ছেদ সেট(Intersection of Sets): দুই বা তার অধিক সেটেরে সাধারণ($Common$) উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলে। ছেদ সেটকে $A \cap B$ দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং পড়তে হয় "$A\ \ Intersection\ \ B$"।
ছেদ সেট গঠন পদ্ধতি: $A \cap B =\{x: x \in A$ এবং $x \in B\}$

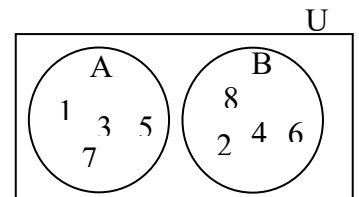
উদাহরণ 2: যদি $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ এবং $B = \{2,4,6,8,10\}$ হয়, তাহলে $A \cap B$ নির্ণয় করুন এবং ভেনচিত্রে দেখান।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ এবং $B = \{2,4,6,8,10\}$
$\therefore A \cap B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cap \{2,4,6,8,10\}$
$= \{2,4,6\}$

পূরক সেট(Complement of Sets): পূর্ববর্তী পাঠে আপনারা পূরক সেট সম্পর্কে জেনেছেন। এখন আপনারা ভেনচিত্রে পূরক সেট একটি উদাহরণের মাধ্যমে শিখবেন।

উদাহরণ 3: দেওয়া আছে, সার্বিক সেট $U = \{x: 0 < x \leq 10, x \in Z\}$ এবং $A = \{x: x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$,
তালিকা পদ্ধতিতে U, A এবং A' নির্ণয় করুন এবং ভেনচিত্রে A' দেখান।

সমাধান: দেওয়া আছে,সার্বিক সেট $U = \{x: 0 < x \leq 10, x \in Z\}$
এবং $A = \{x: x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$
তালিকা পদ্ধতিতে $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
এবং $A = \{2,4,6,8,10\}$
সুতরাং, $A' = \{1,3,5,7,9\}$

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Sets): দুইটি সেটের মধ্যে যদি কোনো সাধারণ (Common) উপাদান না থাকে তাহলে সেই সেট দুইটিকে নিশ্ছেদ সেট বলা হয়।
মনে করুন, A ও B দুইটি সেট। $A \cap B = \emptyset$ (ফাঁকা সেট) হলে তাকে নিশ্ছেদ সেট বলা হয়।

উদাহরণ 4: যদি সার্বিক সেট U, $A = \{1,3,5,7\}$ এবং $B = \{2,4,6,8\}$ হলে $A \cap B$ এর মান নির্ণয় করুন এবং ভেনচিত্রে দেখান।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{1,3,5,7\}$ এবং $B = \{2,4,6,8\}$
$A \cap B = \{1,3,5,7\} \cap \{2,4,6,8\} = \emptyset$

উদাহরণ 5 : যদি $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,3,4,6,7,10\}$ এবং $B = \{2,4,6,8,10,\}$ হয়, তাহলে (ক) $A \cap B$ (খ) $A' \cap B$ (গ) $A \cap B'$ (ঘ) $A' \cap B'$ নির্ণয় করুন। (ঙ) $A' \cap B'$ ভেনচিত্রে দেখান।

সমাধান: দেওয়া আছে, $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,3,4,6,7,10\}$ এবং $B = \{2,4,6,8,10\}$

(ক) $\therefore A \cap B = \{1,3,4,6,7,10\} \cap \{2,4,6,8,10\} = \{4,6,10\}$

(খ) $A' = \{2,5,8,9\}$

$\therefore A' \cap B = \{2,5,8,9\} \cap \{2,4,6,8,10\} = \{2,8\}$

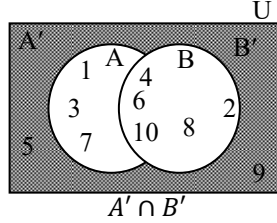
(গ) $B' = \{1,3,5,7,9\}$

$\therefore A \cap B' = \{1,3,4,6,7,10\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{1,3,7\}$

(ঘ) $A' = \{2,5,8,9\}$ এবং $B' = \{1,3,5,7,9\}$

$\therefore A' \cap B' = \{2,5,8,9\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{5,9,\}$

(ঙ)

$A' \cap B'$

উদাহরণ 6: যদি $U = \{x: 0 < x \leq 12, x \in Z^+\}$, $A =$\{$x: x$, 3 এর গুণীতক\} এবং $B = \{x: x + 2 > 5, x \in Z^+\}$ হয়, তাহলে

(ক) সেটসমূহকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

(খ) $A \cup B$ নির্ণয় করুন এবং ভেনচিত্রে দেখান।

(গ) $A \cap B$ নির্ণয় করুন এবং ভিন্ন ভেনচিত্রে দেখান।

(ঘ) $A' \cap B$ এবং $A \cup B'$ নির্ণয় করুন এবং ভিন্ন ভিন্ন ভেনচিত্রে দেখান।

(ঙ) $n(A')$, $n(B')$,

সমাধান: (ক) দেওয়া আছে, $U = \{x: 0 < x \leq 12, x \in Z^+\}$, $A =$\{$x: x$, 3 এর গুণীতক\} এবং $B = \{x: x + 2 > 7, x \in Z^+\}$

সুতরাং, তালিকা পদ্ধতিতে $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$,

$A = \{3,6,9,12\}$ এবং $B = \{6,7,8,9,10,11,12\}$

(খ) $A = \{3,6,9,12\}$, $B = \{6,7,8,9,10,11,12\}$

$A \cup B = \{3,6,9,12\} \cup \{6,7,8,9,10,11,12\}$
$= \{3,6,7,8,9,10,11,12\}$

$A \cup B$

(গ) $A = \{3,6,9,12\}$, $B = \{6,7,8,9,10,11,12\}$

$A \cap B = \{3,6,9,12\} \cap \{6,7,8,9,10,11,12\}$
$= \{6,9,12\}$

$A \cap B$

(ঘ) $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, $A = \{3,6,9,12\}$ এবং $B = \{6,7,8,9,10,11,12\}$

$\therefore A' = \{1,2,4,5,7,8,10,11\}$

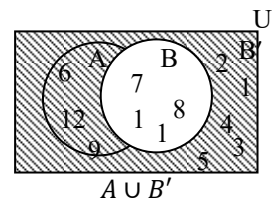
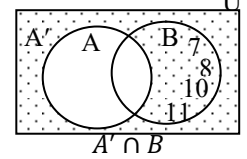
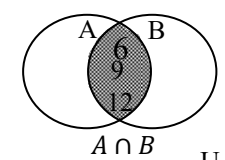
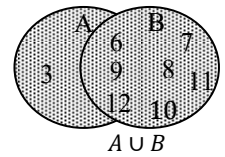
সুতরাং, $A' \cap B = \{7,8,10,11\}$

$A' \cap B$

$\therefore B' = \{1,2,4,5\}$

সুতরাং , $A \cup B' = \{1,2,3,4,5,6,9,12\}$

$A \cup B'$

(ঙ) $A' = \{1,2,4,5,7,8,10,11\}$

$\therefore n(A') = 8$
$B' = \{1,2,4,5\}$
$\therefore n(B') = 4$
$A' \cap B = \{7,8,10,11\}$
$n(A' \cap B) = 4$
$A \cup B' = \{1,2,3,4,5,6,9,12\}$
$n(A \cup B') = 8$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.২

1. দেওয়া আছে ইংরেজি বর্ণমালা সার্বিক সেট U, $L = \{e,n,g,l,i,s,h,k\}$,এবং $M = \{h,i,s,t,o,r,y\}$
   (ক) ভেনচিত্রে সার্বিকসেট U, L এবং M দেখান।
   (খ) সেট $L \cup M = \{x: x \in L$ অথবা $x \in M\}$ এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।
   (গ) সেট $L \cap M = \{x: x \in L$ এবং $x \in M\}$ এর উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।
   (ঘ) ভিন্ন ভেনচিত্রে গাঢ় করে $L \cup M$ এবং $L \cap M$ দেখান।
2. দেওয়া আছে সার্বিকসেট $U = \{p,q,r,s,t,u,v,w\}$, $A = \{p,q,r,s,t\}$, $B = \{r,s,t\}$ এবং
   $C = \{s,t,u,v,w\}$
   (ক) $A \cap B$, $B \cap C$ এবং ,$C \cap A$ নির্ণয় করুন এবং ভেনচিত্রে দেখান।
   (খ) $\cup B'$, $B \cup C'$ এবং $C \cup A'$ নির্ণয় করুন এবং ভিন্ন ভিন্ন ভেনচিত্রে দেখান ।
   (গ) $A \cap B \cap C$ নির্ণয় করুন এবং ভেনচিত্রে দেখান।
3. দেওয়া আছে সার্বিকসেট $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{2,4,6,9,10\}$,
   $B = A \cap B\{4,7,8\}$ এবং $C = \{1,3,4,,5,7,9\}$ হলে ভিন্ন ভিন্ন ভেনচিত্রে নিচের সেটগুলো গাঢ় চিহ্ন দ্বারা দেখান।
   (ক) $A \cap B$
   (খ) $A' \cap B$
   (গ) $A \cap B'$
   (ঘ) $A' \cap B'$
   (ঙ) $A \cap B \cap C$
   (চ)দেখান যে , $n(A \cap B) + n(A' \cap B) + n(A \cap B') + n(A' \cap B') = n(U)$

পাঠ ১.৩ সেট প্রক্রিয়ার ধর্মাবলী

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সেটের বিনিময় বিধি প্রয়োগ করতে পারবেন,
- সেটের সহযোজন বিধি প্রয়োগ করতে পারবেন,
- সেটের বন্টন বিধি প্রয়োগ করতে পারবেন,
- দ্যা মরগান সূত্র প্রমাণ করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে প্রতীজ্ঞা সমূহ ব্যবহার করতে পারবেন

মূখ্য শব্দ	বিনিময় বিধি, সহযোজন বিধি,

 মূলপাঠ

সংযোগ ও ছেদ সেটের ধর্মাবলী

প্রতিজ্ঞা ১: বিনিময় বিধি (Commutative law)

সংযোগ প্রক্রিয়ার বিনিময় বিধি

মনে করুন $A = \{x, y, z. t\}$ এবং $B = \{r, s, t, y\}$

আপনারা জানেন, $A \cup B = \{x: x \in A$ অথবা $x \in B\}$

সুতরাং, $A \cup B = \{x, y, z. t\} \cup \{r, s, t, y\} = \{r, s, t, x, y, \}$

আবার $B \cup A = \{r, s, t, y\} \cup \{x, y, z. t\} = \{r, s, t, x, y, \}$

$A \cup B$ এবং $B \cup A$ এ একই উপাদান রয়েছে।

সুতরাং $A \cup B = B \cup A$

∴ সেটের সংযোগ সেটের বিনিময় বিধি মেনে চলে।

সেটের ছেদ প্রক্রিয়ার বিনিময় বিধি

মনে করুন, $A = \{1,2,3\}$ এবং $B = \{2,3,4\}$

আমরা জানি, $A \cap B = \{x: x \in A$ এবং $x \in B\}$

সুতরাং, $A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

আবার $B \cap A = \{2,3,4\} \cap \{1,2,3\}$

$A \cap B$ এবং $B \cap A$ এ একই উপাদান রয়েছে।

সুতরাং $A \cap B = B \cap A$

∴ সেটের ছেদ সেটের বিনিময় বিধি মেনে চলে।

প্রতিজ্ঞা ২: সহযোজন বিধি (Associative law)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

মনে করুন, $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$,এবং $C = \{3,4,5\}$

$(B \cup C) = \{2,3,4\} \cup \{3,4,5\} = \{2,3,4,5\}$

$A \cup (B \cup C) = \{1,2,3\} \cup 2,3,4,5 = \{1,2,3,4,5\}$

$(A \cup B) = \{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

$(A \cup B) \cup C = \{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

$A \cup (B \cup C)$ এবং $(A \cup B) \cup C$ এর উপাদান প্রকৃতপক্ষে একই

সুতরাং, সেটের সংযোগ প্রক্রিয়া সহযোজন বিধি মেনে চলে।

শিক্ষার্থীর কাজ	$P = \{a, b, c\}, Q = \{b, c, d\}$,এবং $R = \{c, d, e\}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

প্রতিজ্ঞা ৩: $\boldsymbol{A \cup A = A}$

মনে করুন, $A = \{1,3,5\}$

: $A \cup A = \{1,3,5\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3\} = A$

∴ যে কোনো সেট A এর জন্য $A \cup A = A$

একই ভাবে $A \cap A = A$

প্রতিজ্ঞা ৪: যদি $\boldsymbol{A} \subset B$ তখন $\boldsymbol{A \cup B = B}$

মনে করুন, $A = \{2,3,5\}$ এবং $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ দুইটি সেট।
A সেটের সব কয়টি উপাদান B সেটে বিদ্যমান, সুতরাং $A \subset B$
এখন, $A \cup B = \{2,3,5\} \cup \{1,2,3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = B$
$\therefore$ যদি $A \subset B$ তখন $A \cup B = B$ একই ভাবে $B \subset A$ তখন $B \cup A = A$
আবার, যদি $A \subset B$ তখন $A \cap B = A$ এবং $B \subset A$ তখন $B \cap A = B$

প্রতিজ্ঞা ৫: যে কোনো দুইটি সেট A এবং B এর জন্য $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$
মনে করুন, $A = \{r, s, t\}$ এবং $B = \{s, x, y, z\}$
সুতরাং, $A \cup B = \{r, s, t, x, y, z\}$
অতএব, A সেটের সকল উপাদান $(A \cup B)$ সেটে বিদ্যমান
$\therefore A \subset (A \cup B)$
এবং B সেটের সকল উপাদান সেটে $(A \cup B)$ বিদ্যমান
$\therefore B \subset (A \cup B)$
$A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$
অনুরূপভাবে, $(A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$

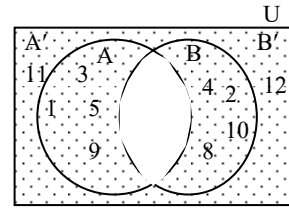
প্রতিজ্ঞা ৬: $A \cup U = U$ এবং $A \cup \emptyset = A$
আমরা জানি, $A \subset U$ এবং $\emptyset \subset A$ প্রতিজ্ঞা 4. অনুযায়ী
$A \cup U = U$ এবং $A \cup \emptyset = A$

শিক্ষার্থীর কাজ	দেওয়া আছে, $U = \{x : 1 \leq x \leq 16, x \in Z^+\}$, $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \in Z^+\}$ এবং $B = \{x \mid x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ হলে প্রমাণ করুন, $A \cup U = U$ এবং $A \cup \emptyset = A$

প্রতিজ্ঞা ৭: বন্টন বিধি (Distributive law)
যে কোনো সেট A, B এবং C হলে, দেখান যে
(ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
প্রমাণ: মনে করুন, $x \in A \cup (B \cap C)$
তাহলে, $x \in A$ অথবা $x \in (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in A$ অথবা ($x \in B$ এবং $x \in C$)
$\Rightarrow$ ($x \in A$ অথবা $x \in B$)এবং ($x \in A$ অথবা $x \in C$)
$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ এবং $x \in (A \cup C)$
$\therefore x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (i)$
আবার মনে করুন, $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C)$
তাহলে, $x \in A$ অথবা $x \in (B \cap C)$
$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ এবং $x \in (B \cup C)$
$\Rightarrow$ ($x \in A$ অথবা $x \in B$)এবং ($x \in A$ অথবা $x \in C$)
$\Rightarrow x \in A$ অথবা ($x \in B$ এবং $x \in C$)
$\therefore x \in A \cup (B \cap C) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (ii)$
সুতরাং (i) ও (ii) হতে পাওয়া যায়, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (প্রমাণিত)
অনুরূপভাবে, প্রমাণ করুন $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রতিজ্ঞা ৮: দ্যা মরগ্যানের সূত্র (De Morgan's law)

সার্বিক সেট U এর যে কোনো উপসেট A ও B এর জন্য
(ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং (খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
প্রমাণঃ মনে করুন, $x \in (A \cup B)$
$\therefore x \notin A \cup B$
$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$
$\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$
$\Rightarrow x \in (A' \cap B')$
সুতরাং, $(A \cup B)' \subset (A' \cap B')$ ------------------------(i)
আবার মনে করুন, $x \in A' \cap B'$
$\Rightarrow x \in A'$ অথবা $x \in B'$
$\Rightarrow x \notin A$ অথবা $x \notin B$
$\Rightarrow x \notin (A \cup B)$
$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$
সুতরাং, $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ ------------------------(ii)
(i) এবং (ii) থেকে পাওয়া যায়,
$(A \cup B)' = A' \cap B'$

(খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ সূত্রটির প্রমাণ উদাহরণের মাধ্যমে দেখবেন।
দেওয়া আছে, $U = \{x : 1 \le x \le 12, x \in Z^+\}$
$A = \{1,3,5,6,7,9\}$ এবং $B = \{2,4,6,7,8,10\}$
$\therefore U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
$A \cap B = \{1,3,5,7,9\} \cap \{2,4,6,8,10\} = \{6,7\}$
$\therefore (A \cap B)' = \{1,2,3,4,5,8,9,10,11,12\}$
আবার, $A' = \{2,4,8,10,11,12\}$ এবং $B' = \{1,3,5,9,11,12\}$
$A' \cup B' = \{2,4,8,10,11,12\} \cup \{1,3,5,9,11,12\}$
$\Rightarrow A' \cup B' = \{1,2,3,4,5,8,9,10,11,12\}$
সুতরাং, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (প্রমাণিত)

সারসংক্ষেপ

সার্বিক সেট U এবং যে কোনো সেট A, B ও C এর জন্য-

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- যদি $A \subset B$ তখন $A \cup B = B$
- যদি $A \subset B$ তখন $A \cap B = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

পাঠ ১.৪ সমতুল সেট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি সেটের এক-এক মিল ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সমতুল সেট বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	এক-এক মিল, সমতুল সেট

মূলপাঠ

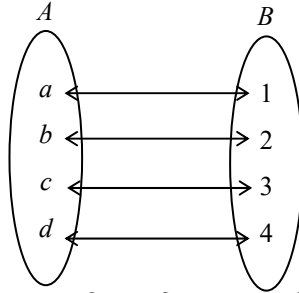
এক-এক মিল (One One Correspondence)

মনে করুন, $A = \{a, b, c\}$ তিনজন বালকের সেট এবং $B = \{3.9, 4.0, 4.5\}$ ঐ তিনজন বালকের উচ্চতার সেট। অর্থাৎ, a বালকের উচ্চতা 3.9 ফুট, b বালকের উচ্চতা 4.0 ফুট এবং C বালকের উচ্চতা 4.5 ফুট।

সুতরাং বলা যায় যে, A সেটের সাথে B সেটের এক-এক মিল আছে।

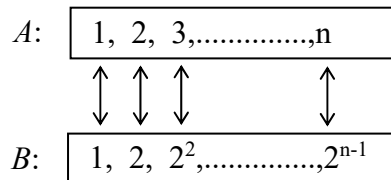
সংজ্ঞা: যদি A সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদান এবং B সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে A সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানের মিল স্থাপন করা হয়, তবে A ও B এর মধ্যে এক-এক মিল বলা হয়। A ও B এর মধ্যে এক এক মিলকে সাধারণত $A \leftrightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং A সেটের কোন সদস্য x এর সঙ্গে B সেটের যে সদস্য y এর মিল করা হয়েছে তা $x \leftrightarrow y$ লিখে বর্ণনা করা হয়।

সমতুল সেট (Equivelent set)

ধরুন, $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$ দুইটি সেট। নিচের চিত্রে A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপন করে দেখানো হলো :

সংজ্ঞা: যেকোনো সেট A ও B এর মধ্যে যদি একটি এক-এক মিল $A \leftrightarrow B$ বর্ণনা করা যায়, তবে A ও B কে সমতুল সেট বলা হয়। A ও Bকে সমতুল বোঝাতে $A \sim B$ প্রতীক লেখা হয়। $A \sim B$ প্রতীক হলে, এদের যেকোনো একটিকে অপরটির সাথে সমতুল বলা হয়।

উদাহরণ 1: দেখান যে, $A = \{1, 2, 3, ... n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, ... 2^{n-1}\}$ সেটদ্বয় সমতুল, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

সমাধান: দেওয়া আছে $A = \{1, 2, 3, ... n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, ... 2^{n-1}\}$

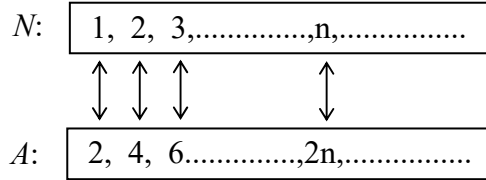
A ও B সেট দুইটির মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো:

সুতরাং A ও B সেট দুইটি সমতুল।

মন্তব্য: সেটদ্বয়ের এই এক-এক মিলটিকে $A \leftrightarrow B: K \leftrightarrow 2^{k-1}, k \in A$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

উদাহরণ 2: দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং জোড় সংখ্যার সেট $A = \{2, 4, 6, ...n.....\}$ সমতুল।

সমাধান: দেওয়া আছে $A = \{2, 4, 6, ...n.....\}$

স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1,2,3, ...;n........\}$

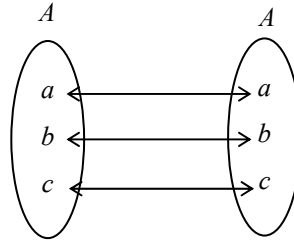
এখন N এবং A এর মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো

সুতরাং N ও A সমতুল সেট।

মন্তব্য : সেটদ্বয়ের এক-এক মিলটিকে $N \leftrightarrow A: n \leftrightarrow 2n, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

দ্রষ্টব্য : ফাঁকা সেট Φ এর নিজের সমতুল ধরা হয়। অর্থাৎ, $\Phi \sim \Phi$

প্রতিজ্ঞা ১: প্রত্যেক সেট A তার নিজের সমতুল।

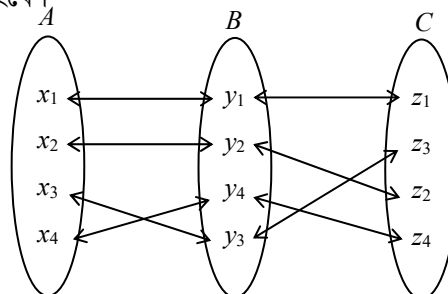
প্রমাণ: $A \sim \Phi$ হলে, $A \sim A$ ধরা হয়।

মনে করুন, $A \neq \Phi$

A সেটের প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে তার নিজেকে মিল করা হলে এক-এক মিল $A \leftrightarrow A: x \leftrightarrow x, x \in A$ স্থাপিত হয়।

সুতরাং $A \sim A.$

প্রতিজ্ঞা ২: যদি A ও B সমতুল সেট হয়, তবে A ও C সমতুল সেট হবে। অর্থাৎ, $A \sim B$ হলে $B \sim A$ হবে।

প্রতিজ্ঞা ৩: যদি A ও B সমতুল সেট হয় এবং B ও C সমতুল সেট হয়, তবে A ও C সমতুল সেট হবে। অর্থাৎ, $A \sim B$ এবং $B \sim C$ হলে $A \sim C$ হবে।

প্রমাণ: যেহেতু $A \sim B$, সুতরাং A এর প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে B এর একটি অনন্য সদস্য y এর মিল করা যায়। আবার যেহেতু $B \sim C$, সুতরাং B এর এই সদস্য y এর সঙ্গে C এর একটি অনন্য সদস্য z এর মিল করা যায়। এখন A এর সদস্য x এর সঙ্গে C এর এ সদস্য z এর মিল করা হলে, A ও C সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয়। অর্থাৎ, $A \sim C$ হয়। নিম্নের চিত্রের মাধ্যমে বিষয়টি আরও পরিষ্কার হবে।

সারসংক্ষেপ

- যদি A সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদান এবং B সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে A সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানের মিল স্থাপন করা হয়, তবে A ও B এর মধ্যে এক-এক মিল বলা হয়। A ও B এর মধ্যে এক এক মিলকে সাধারণত $A \leftrightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং A সেটের কোন সদস্য x এর সঙ্গে B সেটের যে সদস্য y এর মিল করা হয়েছে তা $x \leftrightarrow y$ লিখে বর্ণনা করা হয়।
- যেকোনো সেট A ও B এর মধ্যে যদি একটি এক-এক মিল $A \leftrightarrow B$ বর্ণনা করা যায়, তবে A ও B কে সমতুল সেট বলা হয়। A ও Bকে সমতুল বোঝাতে $A \sim B$ প্রতীক লেখা হয়। $A \sim B$ প্রতীক হলে, এদের যেকোনো একটিকে অপরটির সাথে সমতুল বলা হয়।
- প্রত্যেক সেট A তার নিজের সমতুল।
- প্রত্যেক সেট A তার নিজের সমতুল।
- যদি A ও B সমতুল সেট হয় এবং B ও C সমতুল সেট হয়, তবে A ও C সমতুল সেট হবে। অর্থাৎ, $A \sim B$ এবং $B \sim C$ হলে $A \sim C$ হবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৪

1. নিচের কোন সেটটিতে এক-এক মিল বিদ্যমান
   (ক) স্বাভাবিক সংখ্যা ও জোড় সংখ্যা (খ) মূলদ সংখ্যা ও অমূলদ সংখ্যা
   (গ) বাস্তব সংখ্যা ও স্বাভাবিক সংখ্যা (ঘ) মৌলিক সংখ্যা ও জোড় সংখ্যা
2. $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c\}$ হলে নিচের কোনটি সত্য?
   (ক) $A \sim \Phi$ (খ) $A \sim B$ (গ) $A = B$ (ঘ) $B = A$
3. $A = \{2^n : n = 0$ অথবা $n \in N\}$ সেটটি নিচের কোনটির সমতুল?
   (ক) R (খ) Z (গ) N (ঘ) Q
4. স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং জোড় সংখ্যার সেট A এবং N ও A সমতুল সেট হলে-
   (i) N ও A সেটদ্বয়ের মধ্যে এক-এক মিল রয়েছে
   (ii) $N \sim A$
   (iii) $n \in N$ হলে $n \leftrightarrow 2n$
   (ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)
5. দেখান যে, $A = \{1,2,3,........n\}$ এবং $B = \{1,3,5,.........2n-1\}$ সেটদ্বয় সমতুল, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

পাঠ ১.৫ সান্ত ও অনন্ত সেট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সান্ত সেট বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,

- অনন্ত সেট বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন

মূখ্য শব্দ	সান্ত সেট, অনন্ত সেট

মূলপাঠ

সান্ত ও অনন্ত সেট (*Finite and Infinite sets*)

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ সেটটির সদস্যগুলো গণনা করে দেখা যায় যে, A সেটের সদস্য সংখ্যা 6। এই গণনা কাজ A সেটের সঙ্গে $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সেটের একটি এক-এক মিল স্থাপন করে সম্পন্ন করা হয়। যেমন,

$$\begin{array}{l} A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\} \\ \qquad\ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow \\ B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} \end{array}$$

এরূপ গণনা করে যে সকল সেটের সদস্য সংখ্যা নির্ধারণ করা যায়, তাদেরকে সান্ত সেট বলা হয়। ফাঁকা সেটকেও সান্ত সেট ধরা হয়।

সংজ্ঞা: (ক) ফাঁকা সেট Φ সান্ত সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা শূন্য (0).

(খ) যদি কোনো সেট A এবং $J_n \{1, 2, 3, ..., n\}$ সমতুল হয়, যেখানে $n \in N$, তবে A একটি সান্ত সেট এবং A এর সদস্য সংখ্যা n।

(গ) A কোনো সান্ত সেট হলে, A এর সদস্য সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা সূচিত হয়।

মনে রাখার বিষয়:

১. শুধুমাত্র সান্ত সেটেরই সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। সুতরাং $n(A)$ লিখলে বুঝতে হবে A সান্ত সেট।

২. A ও B সমতুল সেট এবং এদের মধ্যে একটি সেট সান্ত হলে অপর সেটটিও সান্ত হবে এবং $n(A) = n(B)$ হবে।

অনন্ত সেট: কোনো সেট A সান্ত সেট না হলে, একে অনন্ত সেট বলা হয়। পাঠ ১.৪-এর উদাহরণ ২ এ N অনন্ত সেট।

প্রতিজ্ঞা ১: যদি A সান্ত সেট হয় এবং B, A এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে B সান্ত সেট হবে এবং $n(B) < n(A)$ হবে।

প্রতিজ্ঞা ২: A অনন্ত সেট হবে যদি ও কেবল যদি A এবং Aএর একটি প্রকৃত উপসেট সমতুল হয়।

প্রতিজ্ঞা ৩: যদি A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সেট হয়, তবে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

এই প্রতিজ্ঞাকে সম্প্রসারণ করে বলা যায় যে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

এবং $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$ ইত্যাদি, যেখানে A, B, C, D সেটগুলো পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট।

প্রতিজ্ঞা ৪: যেকোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

প্রমাণ: পাশের ভেনচিত্রটি লক্ষ করুন। এখানে, $A \setminus B$, $A \cap B$ *এবং* $B \setminus A$ সেট তিনটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট এবং

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

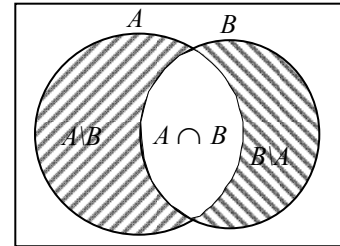
$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$\therefore n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B)$..................(i)

$n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B)$..................(ii)

$\therefore n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A)$..................(iii)

সুতরাং, (i) নং থেকে পাওয়া যায়, $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

(ii) নং থেকে পাওয়া যায়, $n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B)$
এখন, $n(A \setminus B)$ এবং $n(B \setminus A)$ এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B)$

$$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

উদাহরণ 1: দেখান যে, সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $A = \{1,3,5,7,.............\}$ অনন্ত সেট।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \{1,3,5,7,.............\}$ সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট। দেখাতে হবে যে, A সেটটি একটি অনন্ত সেট।

নিম্নোক্তভাবে আমরা অন্য একটি সেট B বর্ণনা করতে পারি।

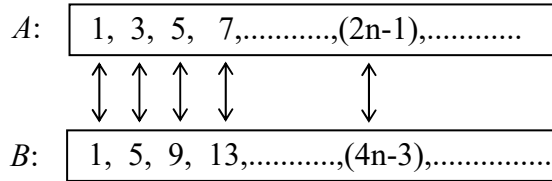
$B = \{2k - 1 : k \in A\}$ অর্থাৎ $B = \{1,5,9,13,.........\}$

এখানে B সেটের প্রতি সদস্যই বিজোড় তাই সেগুলো অবশ্যই A সেটে আছে। কিন্তু A সেটে কিছু সদস্য আছে যারা B সেটে নাই (যেমন 3, 7 ,.. ইত্যাদি)। সুতরাং B সেট অবশ্যই A সেটের প্রকৃত উপসেট।

এখন আমারা A সেট ও B সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নোক্তভাবে দেখাতে পারি,

A: 1, 3, 5, 7,..........,(2n-1),...........

↕ ↕ ↕ ↕ ↕

B: 1, 5, 9, 13,..........,(4n-3),...............

B, A এর প্রকৃত উপসেট এবং A ও B এর মধ্যে একটি এক-এক মিল আছে অর্থাৎ A ও B সমতুল। অতএব বলা যায় A সেটটি একটি অনন্ত সেট।

সারসংক্ষেপ

- ফাঁকা সেট Φ সান্ত সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা শূন্য (0)।
- যদি কোনো সেট A এবং J_n $\{1, 2, 3,....,n\}$ সমতুল হয়, যেখানে $n \in N$, তবে A একটি সান্ত সেট এবং A এর সদস্য সংখ্যা n।
- A কোনো সান্ত সেট হলে, A এর সদস্য সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা সূচিত হয়।
- শুধুমাত্র সান্ত সেটেরই সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। সুতরাং $n(A)$ লিখলে বুঝতে হবে A সান্ত সেট।
- A ও B সমতুল সেট এবং এদের মধ্যে একটি সেট সান্ত হলে অপর সেটটিও সান্ত হবে এবং $n(A) = n(B)$ হবে।
- যদি A সান্ত সেট হয় এবং B, A এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে B সান্ত সেট হবে এবং $n(B) < n(A)$ হবে।
- A অনন্ত সেট হবে যদি ও কেবল যদি A এবং Aএর একটি প্রকৃত উপসেট সমতুল হয়।
- যদি A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সেট হয়, তবে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- যেকোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৫

1. গণনা করে কোন সেটের সদস্য সংখ্যা নির্ধারণ করা যায়
   (ক) অসীম সেট (খ) বাস্তব সংখ্যার সেট (গ) অনন্ত সেট (ঘ) সান্ত সেট
2. নিচের কোনটি সান্ত সেট
   (ক) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট (খ) বাস্তব সংখ্যার সেট (গ) ফাঁকা সেট (ঘ) মৌলিক সংখ্যার সেট
3. A সেট একটি সান্ত সেট A ও B সমতুল সেট হলে-

(i) B সেট একটি সান্ত সেট
(ii) B সেটের সদস্য সংখ্যা $n(B)$
(iii) $n(A) = b(B)$

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

4. দেখান যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট $A = \{1,4,9,16,25,.............\}$ একটি অনন্ত সেট।

পাঠ ১.৬ বাস্তব সমস্যা সমাধানে সেট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সেটের ধারণা প্রয়োগ করে বাস্তব সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূলপাঠ

সেটের বিভিন্ন সংজ্ঞা ও ধারণা ব্যবহার করে আমরা বাস্তব সমস্যার সমাধান করতে পারি। বাস্তব সমস্যা সমাধানে ভেনচিত্র ব্যবহার করা হয়। এখানে বিভিন্ন উদাহরণের মাধ্যমে কিভাবে বাস্তব সমস্যা সমাধানে সেটের ব্যবহার করা হয় তা দেখবো।

উদাহরণ 1: কোনো পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 85% গণিতে এবং 75% ইংরেজীতে পাশ করল। উভয় বিষয়ে পাশ করেছে 70%। উভয় বিষয়ে শতকরা কতজন ফেল করেছে নির্ণয় করুন।

সমাধান: পাশের ভেন চিত্রটি লক্ষ করুন। এখানে আয়তক্ষেত্রটি 100 জন পরীক্ষার্থীর সেট S নির্দেশ করে। A ও B চিহ্নিত বৃত্তাকার ক্ষেত্র দুইটি যথাক্রমে গণিতে পাশ ও ইংরেজীতে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট নির্দেশ করে। ভেন চিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে যাদের P_1, P_2, P_3 ও P_4 দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

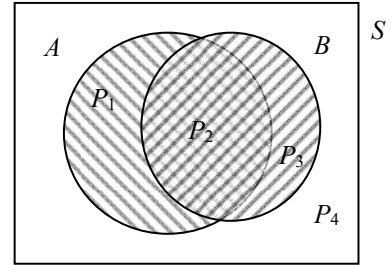
এখানে, $P_2 = A \cap B$ উভয় বিষয়ে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 70

$P_1 = A \setminus P_2$ শুধু গণিতে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 85 - 70 = 15

$P_3 = B \setminus P_2$ শুধু ইংরেজীতে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 75 - 70 = 5

$A \cup B = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ এক এবং উভয় বিষয়ে পাশ পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 15+70+5 = 10

$P_4 = S \setminus (A \cup B)$ উভয় বিষয়ে ফেল পরীক্ষার্থীদের সেট এবং এর সদস্য সংখ্যা = 100 - 90 = 10

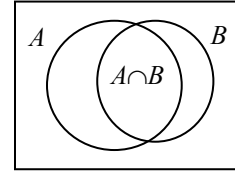
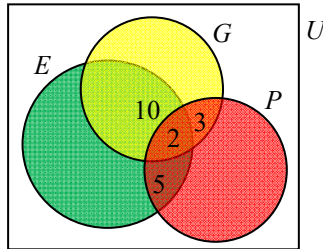
অতএব, উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 10% পরীক্ষার্থী।

উদাহরণ 2: কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থির 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট পছন্দ করে। প্রত্যেক শিক্ষার্থী দুইটি খেলার যেকোনো একটি পছন্দ করে। কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে নির্ণয় করুন।

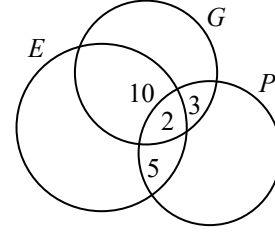
সমাধান: মনে করুন সকল শিক্ষার্থীর সেট S

ফুটবল খেলা পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থীর সেট A

এবং ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থীর সেট B

$\therefore n(S)=30, \quad n(A)=20, \ n(B)=15$
প্রশ্নমতে, $S=A\cup B$
$\because n(S)=30$
$\therefore n(A\cup B)=30$
$\therefore n(A\cap B)=?$
এখন $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$\Rightarrow 30=20+15-n(A\cap B) \ \Rightarrow 30=35-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=35-30=5$
অর্থাৎ দুইটি খেলাই পছন্দ করে 5 জন শিক্ষার্থী।

উদাহরণ 3: কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 60 জন বাংলা, 30 জন ইংরেজী এবং 15 জন বংলা ও ইংরেজী উভয় ভাষায় কথা বলতে পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষায় কথা বলতে পারে কতজন লোক তা নির্ণয় করুন।
সমাধান: মনে করুন, দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষায় কথা বলতে পারে এমন লোকের সেট S। তাদের মধ্যে বাংলায় কথা বলতে পারে তাদের সেট A এবং ইংরেজীতে কথা বলতে পারে তাদের সেট B।
তাহলে প্রশ্নানুসারে, $\therefore n(A)=60, \quad n(B)=30, \ n(A\cap B)=15$
আবার, $n(S)=n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=60+30-15=90-15=75$
$\therefore$ দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষায় কথা বলতে পারে ৭৫ জন।

উদাহরণ 4: একটি শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন নিয়েছে অর্থনীতি, 17 জন নিয়েছে ভূগোল, 11 জন নিয়েছে পৌরনীতি, 12 জন নিয়েছে অর্থনীতি ও ভূগোল, 7 জন নিয়েছে অর্থনীতি ও পৌরনীতি, 5 জন নিয়েছে ভূগোল ও পৌরনীতি এবং 2 জন নিয়েছে সবগুলো বিষয়।
(ক) তথ্যগুলো ভেনচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন।
(খ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেইনি নির্ণয় করুন।
(গ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি বিষয়ের কেবল একটি বিষয় নিয়েছে নির্ণয় করুন।
সমাধান: মনে করুন সব শিক্ষার্থীর সেট U, অর্থনীতি নেওয়া শিক্ষার্থীদের সেট E, ভূগোল নেওয়া শিক্ষার্থীদের সেট G এবং পৌরনীতি নেওয়া শিক্ষার্থীদের সেট P। তথ্যগুলোর ভেনচিত্র নিম্নে দেখানো হলো।

(খ) প্রশ্নমতে, $n(U)=30, \quad n(E)=19, \ n(G)=17, \ n(P)=11$
এবং $n(E\cap G)=12, \quad n(E\cap P)=7, \ n(G\cap P)=5, \quad n(E\cap G\cap P)=2$
আমরা জানি, $n(E\cup G\cup P)=n(E)+n(G)+n(P)-n(E\cap G)-n(E\cap P)-n(G\cap P)+n(E\cap G\cap P)$
$=19+17+11-12-7-5+2=49-24=25$
$\therefore$ তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা $=n(U)-n(E\cup G\cup P)$
$=30-25=5$ জন।
(গ) শুধুমাত্র অর্থনীতি ও ভূগোল নিয়েছে = 12 – 2 = 10 জন

শুধুমাত্র অর্থনীতি ও পৌরনীতি নিয়েছে $= 7 - 2 = 5$ জন
শুধুমাত্র ভূগোল ও পৌরনীতি নিয়েছে $= 5 - 2 = 3$ জন
শুধুমাত্র অর্থনীতি নিয়েছে $= 19 - 10 - 2 - 5 = 2$ জন
শুধুমাত্র পৌরনীতি নিয়েছে $= 11 - 5 - 2 - 3 = 1$ জন
শুধুমাত্র ভূগোল নিয়েছে $= 17 - 10 - 2 - 3 = 2$ জন
$\therefore$ কেবল একটি বিষয় নিয়ছে $= 2 + 2 + 1 = 5$ জন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৬

1. 25 জন শিক্ষার্থীর একটি শ্রেনিতে প্রত্যেক শিক্ষার্থীকে কম্পিউটার শিক্ষা ও উচ্চতর গণিত এই দুইটি বিষয়ের অন্তত একটি নেওয়ার সুযোগ দেওয়া হলো। দেখা গেণো 12 জন শিক্ষার্থী নিয়েছে কম্পিউটার শিক্ষা, এদের মধ্যে 8 জন উচ্চতর গণিত নেয়নি। যারা উভয় বিষয় নিয়েছে তাদের সংখ্যা এবং যারা শুধুমাত্র উচ্চতর গণিত নিয়েছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় করুন।
2. 50 জন লোকের মধ্যে 35 জন ইংরেজী বলতে পারে, 25 জন ইংরেজী ও বাংলা বলতে পারে এবং প্রত্যেকেই দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে। বাংলা বলতে পারে কতজন এবং কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে কতজন নির্ণয় করুন।
3. কোনো স্কুলের 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29 জন পৌরনীতি, 24 জন ভূগোল এবং 11 জন পৌরনীতি ও ভূগোল উভয় বিষয় নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী পৌরনীতি বা ভূগোল বিষয় দুইটির কোনটিই নেয়নি নির্ণয় করুন।
4. ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা শিক্ষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান ও 28 জন স্প্যানিশ ভাষা নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফ্রেঞ্চ এবং 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।
   (ক) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি।
   (খ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে?
   (গ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?

পাঠ ১.৭ অন্বয় ও ফাংশন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অন্বয় ও ফাংশন বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	অন্বয়, ফাংশন, ডোমেন, রেঞ্জ

মূলপাঠ

অন্বয় (Relation): মনে করুন, সকল x এর সেট A এবং সকল y এর সেট B।

সুতরাং $A \times B$ দ্বারা সকল $\{(x,y)\}$ এর সেট নির্দেশ করে এবং $A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত হয়। মনে করুন, A ও B সেটের অন্বয় $\Re$ দ্বারা নির্দেশিত। এই $\Re$ দ্বারা এমন একটি খোলা বাক্য বোঝানো হয় যা $A \times B$ সেটের সদস্য (x, y) জোড়ের জন্য $P(x, y)$ সত্য হতে পারে আবার সত্য না-ও হতে পারে। এখানে $P(x, y)$ দ্বারা x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক বোঝায়। x ও y সম্পর্কিত হলে $P(x, y)$ সত্য, আবার x ও y সম্পর্কিত না হলে $P(x, y)$ সত্য নয়। অতএব $\Re \subseteq A \times B$।

সাধারণত $\Re = \{A, B, P(x,y)\}$ দ্বারা অন্বয় সূচিত করা হয়। $a\Re b$ এর অর্থ হল a, b এর সাথে সম্পর্কিত। $a\Re b$ হলে $P(a, b)$ সত্য হবে। আবার $P(a, b)$ সত্য হলে $a\Re b$ হবে। অতএব, $x \in A, y \in B$ হলে $\Re = \{(x, y): (x, y) \in A \times B\}$ আবার x ও y সম্পর্কিত না হলে $(x, y) \notin \Re$ এবং বিপরীত ক্রমেও সত্য।

উদাহরণ 1: $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{1, 3, 5\}$ দুটি সেট বিবেচনা করুন।

সেট দুটির কার্তেসীয় গুণজ, $A \times B = \{1, 2, 3\} \times \{1, 3, 5\}$

$$= \{(1,1), (1,3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$$

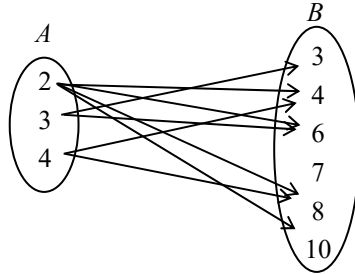
এখন, A সেটের যে যে উপাদান B সেটের যে যে উপাদানের চেয়ে ছোট তাদের নিয়ে ক্রমজোড়ের একটি সেট F গঠন করুন। অতএব, $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$

স্পষ্টতই, F সেটের অর্ন্তভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান A সেট থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান B সেট থেকে নেয়া হয়েছে যেন প্রথম উপাদানটি দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে ছোট হয়। এক্ষেত্রে বলা হয়, F সেটটি A থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

প্রতীকের সাহায্যে আমরা অন্বয়টি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণনা করতে পারি: $F = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং $x < y\}$

উল্লেখ্য, F সেট $A \times B$ কার্তেসীয় গুণজ সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ $F \subset A \times B$

উদাহরণ 2: দ্বিতীয় উদাহরণ হিসেবে $A = \{2, 3, 4\}$ এবং $B = \{3, 4, 6, 7, 8, 10\}$ দুটি সেট বিবেচনা করুন।

A সেটের যে সমস্ত সদস্য দ্বারা B সেটের যে সদস্যগুলো বিভাজ্য হয় তাদের অন্বিত করে নিচের চিত্রে দেখানো হল:

এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট F গঠন করুন।

অতএব, $F = \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8)\}$

এই F সেটটি দ্বারা উল্লেখিত বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়। F সেটে অর্ন্তভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদ A সেটের সদস্য ও দ্বিতীয় পদ B সেটের সদস্য এবং প্রথম পদ দ্বারা দ্বিতীয় পদ বিভাজ্য। এখানে F সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় এবং $F = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$

স্পষ্টতই, $F \subset A \times B$

সংজ্ঞা: A এবং B দুটি সেট হলে, কার্তেসীয় গুণজ সেট $A \times B$ এর কোন অশূন্য উপসেটকে A থেকে B তে একটি অন্বয় (relation) বলে।

আবার, A সেট হলে $A \times A$ এর কোন অশূন্য উপসেট A সেটে একটি অন্বয় বলা হয়।

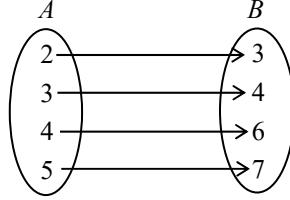
মন্তব্য: প্রত্যেক অন্বয় এক বা একাধিক ক্রমজোড়ের একটি সেট।

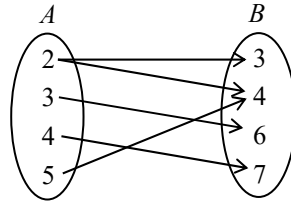
অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of relation):

মনে করুন, A সেট থেকে B সেটে F একটি অন্বয়, অর্থাৎ $F \subset A \times B$, F সেটে অর্ন্তভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে F এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে F এর রেঞ্জ বলা হয়।

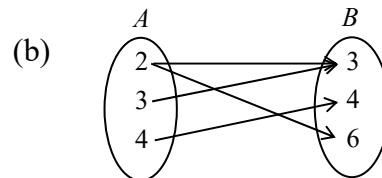
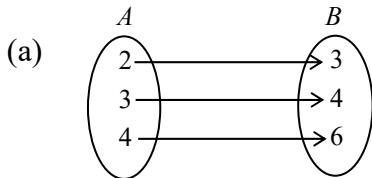
F এর ডোমেনকে ডোম F এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ F লিখে সংক্ষেপে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 3: উদাহরণ 1-এ বর্ণিত অন্বয় $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।
সমাধান: $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}$
F এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট $\{1, 2, 3\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট $\{3, 5\}$।
অতএব, ডোম $F = \{1, 2, 3\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{3, 5\}$.

ফাংশন (Function): ভেনচিত্রে সেট $A=\{2, 3, 4, 5\}$ এর উপাদানগুলো সেট $B = \{3, 4, 6, 7\}$ এর উপাদনগুলোর সঙ্গে অ্যারো (arrow) চিহ্ন দ্বারা সংযোগ স্থাপন দেখানো হয়েছে। সেট A ও B এর মাঝে এরূপ সংযোগ স্থাপনকে A হতে B এ অন্বয় (relation) বলা হয়।

ভেনচিত্রে A সেটের সদস্য 2 এর সাথে B সেটের সদস্য 3 এর সম্পর্ককে $2 \to 3$ দ্বারা প্রকাশ করে আমরা বলি প্রারম্ভিক সদস্য 2 এবং শেষ সদস্য 3 অথবা 2 ম্যাপিং 3। তদ্রুপ $3\to 4$, $4 \to 6$ এবং $5 \to 7$.
সুতরাং A সেটের প্রতিটি সদস্য x, B সেটের একটি মাত্র সদস্য y এর সাথে সম্পর্কিত। এ সম্পর্ককে ফাংশন বা ম্যাপিং বলে।
সংজ্ঞা: মনে করুন, A ও B দুটি অশূন্য সেট। যদি A ও B এর মধ্যে এমন একটি নিয়ম হয় যে, যাতে A এর প্রত্যেকটি সদস্য x, B এর কোন না কোন একক সদস্য y এর সাথে যোগাযোগ সৃষ্টি করে, তবে এই নিয়মটিকে ফাংশন বলে।
উল্লেখ্য, A সেটের একটি সদস্যের জন্য B সেটে কেবলমাত্র একটি সদস্য থাকবে এবং একাধিক সদস্য থাকতে পারবে না। তবে A সেটের একাধিক সদস্যের জন্য B সেটে একটি সদস্য থাকতে পারে। A সেটের x সদস্য B সেটের যে সদস্যের সাথে সম্পর্কিত তাকে সাধারণত $f(x)$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং প্রতীকের সাহায্যে লিখা যায়,
$f : A\to B$।

পাশের ভেনচিত্রটি লক্ষ্য করুন,

চিত্র থেকে দেখা যায়, $2 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, $4 \to 7$ এবং $5 \to 4$.
A সেটের সদস্য 2, B সেটের দুইটি সদস্য 3 এর 4 এর সাথে ম্যাপিং। এ সম্পর্ক কী ফাংশন? সংজ্ঞানুসারে এ সম্পর্কটি ফাংশন নয়। কারণ সংজ্ঞানুসারে, A সেটের একটি সদস্যের জন্য B সেটে কেবলমাত্র একটি সদস্য থাকবে। অতএব আমরা বলতে পারি,

প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়, তবে প্রত্যেক অন্বয় ফাংশন নয়।

উদাহরণ 4: নিচের কোন অন্বয়টি (relation) ফাংশন নয়? যুক্তি দাও।

সমাধানঃ (a), (c) এবং (d) সম্পর্কটি ফাংশন, কিন্তু (b) সম্পর্কটি ফাংশন নয়, কারণ (b) সম্পর্কে $2 \to 3$ এবং $2 \to 6$।

ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of Function):

সেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়, সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয় হিসেবে এর ডোমেন এবং রেঞ্জকেই বোঝায়। A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি ফাংশন হয় তবে ডোমেন $f = A$ এবং B সেটের যে সমস্ড় উপাদান সকল $a \in A$ এর ছবিরূপে পাওয়া যায় ঐ উপাদানগুলোই f এর রেঞ্জ। সুতরাং রেঞ্জ $f \subset B$ যদি f একটি ফাংশন হয় এবং ডোম $f = A$ এবং রেঞ্জ $f \subset B$ হয়, তবে f কে A থেকে B এ বর্ণিত ফাংশন বলা হয় এবং $f: A \to B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

$f: A \to B$ দ্বারা বোঝায় যে, f একটি ফাংশন যার ডোমেন A এবং রেঞ্জ B এর উপসেট।

যদি f ফাংশন হয় এবং $(x, y) \in F$ হয়, তবে y কে f এর অধীনে ছবি (image) বলা হয় এবং $y = f(x)$ লিখা হয়।

উদাহরণ 5: F সেটে x হলো y-এর বর্গ। অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেটরূপে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ $F = \{(x, y) : x = y^2\}$

উদাহরণ 6: $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি কী ফাংশন? এর ডোমেন ও রেজ্ঞ নির্ণয় করুন। F এর একটি সূত্র নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

উপরোক্ত F অন্বয়ের ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানগুলো ভিন্ন ভিন্ন। তাই F অন্বয়টি একটি ফাংশন।

F ফাংশনের ক্ষেত্রে, $f(-2) = 4,\ f(-1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4$

F এর ডোমেন $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং F এর রেঞ্জ $= \{4, 1, 0\}$.

F এর সূত্র $F = \{(x, y) : x \in A, y \in A, x = y^2\}$, যেখানে $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

কোন ফাংশন f এর ডোমেন এবং ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য x এর অনন্য ছবি $f(x)$ নির্দিষ্ট করা হলেই ফাংশনটি নির্ধারিত হয়। অনেক সময় ডোমেন উহ্য রাখা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে, ডোমেন হিসেবে R (বাস্তব সংখ্যার সেট) এর ঐ উপসেটকে গ্রহণ করা হয় যার প্রত্যেক সদস্য x এর জন্য R–এ $f(x)$ নির্ধারিত থাকে।

সেটে $A = \{1, 2, 3, 4\}$ হতে সেট $B = \{3, 5, 7, 9\}$ ফাংশন নির্দেশ করতে আমরা লিখি $f: 1 \to 3$, $f: 2 \to 5$, $f: 3 \to 7$ এবং $f: 4 \to 9$। এখানে 3 কে বলা হয় 1 এর ইমেজ। তদ্রূপ 5, 7 ও 9 যথাক্রমে 2, 3 ও 4 এর ইমেজ।

এছাড়াও উপরের সেট দুইটিতে A সেটের যেকোনো সদস্য x এবং B সেটের যেকোনো সদস্য y এর সম্পর্কটিকে আমরা $y = 2x + 1$ আকারে প্রকাশ করতে পারি।

অতএব, ফাংশনকে আমরা নিম্নের নিয়ম অনুসরণ করে প্রকাশ করতে পারি $f: x \to y$ যেখানে $y = 2x + 1$

অথবা $f: x \to 2x + 1$ যেখানে আমরা লিখতে পারি $f(x) = 2x + 1$

তাহলে $f(1) = 3$ হলো 1 এর ইমেজ এবং $f(x)$ হলো x এর ইমেজ।

আলোচিত ফাংশনের মধ্যে প্রথম সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$ কে ফাংশনটির আধার (Domain) এবং প্র মোক্ত সেট হতে প্রদত্ত নিয়মে প্রাপ্ত দ্বিতীয় সেটের সংখ্যাগুলোর সেটকে ফাংশনটির বিস্তার (Range) বলা হয়।

অন্যভাবে বলা যায় $y = f(x)$ ফাংশনের আধার হলো x এর এমন একটি সেট যেখানে সমস্ত x এর জন্য $f(x)$ ফাংশনের মান নির্ণয় করা সম্ভব। আর ফাংশনটির আধার xএর জন্য $f(x)$ এর যে সমস্ত মান পাওয়া যায়, এদের সংগ্রহকে এর বিস্তার বা রেঞ্জ বলে।

উদাহরণ 7: $f: x \to 3x^2 + 2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন $D = \{1, 2, 3\}$। তাহলে ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

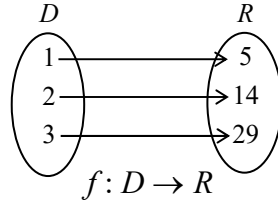
সমাধান: $f(x) = 3x^2 + 2$

f এর অধীনে 1 এর ইমেজ হলো $1 \to 3(1)^2 + 2 \Rightarrow f(1) = 5$

f এর অধীনে 2 এর ইমেজ হলো $2 \to 3(2)^2 + 2 \Rightarrow f(2) = 14$

f এর অধীনে 3 এর ইমেজ হলো $3 \to 3(3)^2 + 2 \Rightarrow f(3) = 29$

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ সেট $R = \{5, 14, 27\}$.

অর্থাৎ,

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৭

1. নিচের কোনটি একটি ফাংশন

   (ক) $A = \{(1,2),(1,4),(2,3)\}$ (খ) $B = \{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$

   (গ) $C = \{(0,1),(1,4),(0,-3)\}$ (ঘ) $D = \{(2,3),(-2,3),(1,4),(3,5)\}$

2. যদি $A = \{(0,0),(2,4),(-1,3),(3,4)\}$ একটি ফাংশন হয়, তবে নিচের কোনটি A এর ডোমেন?

   (ক) $\{0,2,4,3\}$ (খ) $\{0,2,-1,3\}$ (গ) $\{0,-1,4,3\}$ (ঘ) $\{0,4,3,4\}$

   নিচের তথ্যের আলোকে 3 ও 4 নং প্রশ্নের উত্তর দিন:

   $S = \{(x,y): x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$ যেখানে $A = \{-2,-1,0,1,2\}$

3. S এর তালিকা পদ্ধতি কোনটি?

   (ক) $S = \{(0,0),(-1,1),(1,1)\}$ (খ) $S = \{(0,0),(1,-1),(1,1)\}$

   (গ) $S = \{(-2,4),(2,4),(0,0),(-1,1),(1,1)\}$ (ঘ) $S = \{(-2,4),(2,4),(0,0),(1,1)\}$

4. S এর রেঞ্জ কোনটি?

   (ক) $\{1,0\}$ (খ) $\{0,1\}$ (গ) $\{1,-1,0\}$ (ঘ) $\{1,1,0\}$

5. $F(x) = |x|$ বর্ণিত ফাংশনের জন্য-

   (i) $F(x) = 4$ হলে $x = \pm 4$

   (ii) $F(x) = 0$ হলে $x = 1$

   (iii) $F(x) = y$ হলে $x = \pm y$

   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

   (ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

6. নিচের অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন। অন্বয়টি কি ফাংশন?

   $S = \{(0,1),(0,-2),(1,2),(3,-3)\}$

7. প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং কোনগুলো ফাংশন তা নির্ণয় করুন। ডোম S এবং রেঞ্জ S নির্ণয় করুন, যেখানে $A = \{-2,-1,0,1,2\}$

   (ক) $S = \{(x,y): x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

   (খ) $S = \{(x,y): x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

পাঠ ১.৮ বিভিন্ন প্রকার ফাংশন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- এক-এক ফাংশন সম্পর্কে ব্যাখ্যা দিতে পারবেন,
- সার্বিক বা অনটু ফাংশন সম্পর্কে ব্যাখ্যা দিতে পারবেন,
- বিপরীত ফাংশন সম্পর্কে ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	এক-এক ফাংশন, সার্বিক বা অনটু ফাংশন, বিপরীত ফাংশন

মূলপাঠ

এক-এক ফাংশন (One-One Function)

ভেনচিত্রে A এবং B সেটে লক্ষ্য করুন-

ভেনচিত্রে f ফাংশনের অধীনে ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ইমেজ বা ছবি সর্বদা ভিন্ন।

সংজ্ঞা: যদি কোন ফাংশনের অধীনে এর ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ইমেজ বা ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক-এক (One-One) ফংশন বলা হয়, অর্থাৎ $x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 \neq x_2$ হলে $f(x_1) \neq f(x_2)$

সংজ্ঞা থেকে দেখা যায়, একটি ফাংশন $f: A \to B$ কে এক-এক ফাংশন বলা হবে, যদি এবং কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয় যেখানে $x_1, x_2 \in A$.

উদাহরণ 1: দেখান যে, $f(x) = 4x + 7, x \in R$ একটি এক-এক ফাংশন।

সমাধান: দেওয়া আছে $f(x) = 4x + 7$

মনে করুন, $a, b \in R$ তাহলে $f(a) = 4a + 7$ এবং $f(b) = 4b + 7$

এখন, $f(a) = f(b) \Rightarrow 4a + 7 = 4b + 7 \Rightarrow a = b$

সুতরাং f ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

উদাহরণ 2: $F: \Re \to \Re, F(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য-

(ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় করুন।

(খ) দেখান যে, F এক-এক ফাংশন।

সমাধান: (ক) $F(x) = x^2$

$F(x)$ ফাংশনটি x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত এবং x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x)$ অঋণাত্মক হয়।

অতএব ডোম $F \in \Re$ এবং রেঞ্জ $F \in \Re$

(খ) মনে করুন, $x_1, x_2 \in$ ডোম $F(x)$

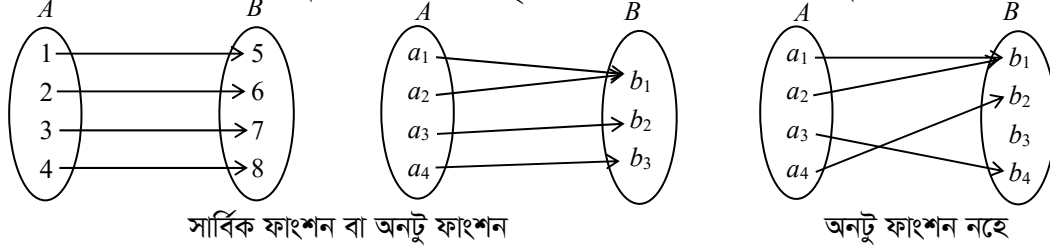
যদি $F(x_1) = F(x_2)$ হয় তখন $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ $[\because x_1, x_2 \in \Re]$

$\therefore$ F এক-এক ফাংশন।

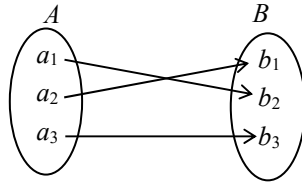
সার্বিক ফাংশন অথবা অনটু ফাংশন (Onto Function)

ভেনচিত্রগুলো লক্ষ করুন-

প্রথম দুইটি চিত্রে ফাংশন F এর অধীনে B সেটের প্রত্যেক উপাদান A সেটের একটি উপাদানের প্রতিবিম্ব, কিন্তু তৃতীয় চিত্রে ফাংশন F এর অধীনে B সেটের একটি উপাদান A সেটের কোনো উপাদানের প্রতিবিম্ব নহে। প্রথম দুইটি চিত্রে বর্ণিত ফাংশনকে সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন বলা হয়। তৃতীয় চিত্রে বর্ণিত ফাংশনটি অনটু নহে।

সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন অনটু ফাংশন নহে

সংজ্ঞা: একটি ফাংশন $f: A \rightarrow B$ কে সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন বলা হবে যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি $a \in A$ পাওয়া যায় যেন $f(a) = b$ হয়। অর্থাৎ $B =$ রেঞ্জ f হয়।

বিপরীত ফাংশন (Inverse function)

সংজ্ঞা: মনে করুন, $f: A \rightarrow B$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তাহলে একটি ফাংশন $g: B \rightarrow A$ বিদ্যমান আছে যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $g(b) = a$ যদি এবং কেবল যদি $f(a) = b$ হয়। তবে g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয় এবং f^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উপরের চিত্রে বর্ণিত ফাংশনটি f ধরা হলে $f: A \rightarrow B$ এবং $f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2,\ f(a_3) = b_3$

অতএব $f^{-1}: B \rightarrow A$ এবং $f(b_1) = a_1,\ f(b_2) = a_2,\ f(b_3) = a_3$

উদাহরণ 3: $F: \Re \rightarrow \Re, F(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য F^{-1} নির্ণয় করুন এবং দেখান যে F^{-1} একটি ফাংশন।

সমাধান: প্রথম অংশ: দেওয়া আছে, $F(x) = x^2$

x এর স্থলে $F^{-1}(x)$ প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$F\left[F^{-1}(x)\right] = \left[F^{-1}(x)\right]^2 \Rightarrow \left[F^{-1}(x)\right]^2 = F\left[F^{-1}(x)\right] \Rightarrow \left[F^{-1}(x)\right]^2 = x$$

$\therefore F^{-1}(x) = \sqrt{x}$

দ্বিতীয় অংশ: এখানে $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$F^{-1}(x)$ এর ডোমেন, ডোম $F^{-1} = \{x \in \Re, x \geq 0\}$

অতএব ডোমেনের অর্ন্তগত প্রত্যেকটি উপাদানের জন্য $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$ এর একটি অনন্য মান পাওয়া যায়।

$\therefore F^{-1}(x)$ একটি ফাংশন।

উদাহরণ 4: যদি $f: \Re \rightarrow \Re$ এবং $g: \Re \rightarrow \Re$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x^3 + 5$ এবং $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখান যে, $g = f^{-1}$ ।

সমাধান: দেওয়া আছে $f(x)=x^3+5$ এবং $g(x)=(x-5)^{\frac{1}{3}}$

ধরুন $y=f(x) \quad \therefore x=f^{-1}(y)$

এখন, $y=f(x) \Rightarrow y=x^3+5 \Rightarrow x^3=y-5 \Rightarrow x=(y-5)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore f^{-1}(y)=(y-5)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore f^{-1}(x)=(x-5)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x)=g(x)$

$\therefore g=f^{-1}$ (প্রমাণিত)

সারসংক্ষেপ

- যদি কোন ফাংশনের অধীনে এর ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ইমেজ বা ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক-এক (One-One) ফংশন বলা হয়, অর্থাৎ $x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 \neq x_2$ হলে $f(x_1) \neq f(x_2)$
- একটি ফাংশন $f: A \rightarrow B$ কে সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন বলা হবে যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি $a \in A$ পাওয়া যায় যেন $f(a) = b$ হয়। অর্থাৎ $B =$ রেঞ্জ f হয়।
- মনে করুন, $f: A \rightarrow B$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তাহলে একটি ফাংশন $g: B \rightarrow A$ বিদ্যমান আছে যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $g(b) = a$ যদি এবং কেবল যদি $f(a) = b$ হয়। তবে g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয় এবং f^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৮

নিচের তথ্যের আলোকে 1-4 নং প্রশ্নের উত্তর দিন:

$A=\{(1,5),(2,10),(3,15),(4,20)\}$

1. ডোম $A=$কত?

   (ক) $\{1,2,3\}$ (খ) $\{1,2,3,4\}$ (গ) $\{1,2,3,4,5\}$ (ঘ) $\{5,10,15,20\}$

2. রেঞ্জ $A=$কত?

   (ক) $\{20,15,10,2\}$ (খ) $\{1,2,3,4\}$ (গ) $\{5,10,15,20\}$ (ঘ) $\{4,5,15,10,20\}$

3. A^{-1} এর ডোম কত?

   (ক) $\{20,15,10,2\}$ (খ) $\{5,10,15,20\}$ (গ) $\{1,2,3,4\}$ (ঘ) $\{4,5,15,10,20\}$

4. A^{-1} এর রেঞ্জ কত?

   (ক) $\{1,2,3,4\}$ (খ) $\{1,2,4\}$ (গ) $\{1,2,3,4,5\}$ (ঘ) $\{5,10,15,20\}$

5. $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow A$ হলে-

   (i) $g=f^{-1}$

   (ii) $f(g(x))=g(f(x))=x$

   (iii) $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$

   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

   (ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

6. একটি ফাংশন এক-এক হবে যদি-

   (i) f এর একটি বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান থাকে

   (ii) $b=f(a)$ বা $a=f^{-1}(b)$

(iii) $b = f(a)$ বা $a \neq f^{-1}(b)$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

7. $f(x) = 3x + 5, x \in \Re$ একটি এক-এক ফাংশন হলে, $f^{-1}(2)$ এর মান কত?

(ক) -1 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 3

8. $f : A \to B$ সার্বিক ফাংশন হলে-

(i) $f(A) = B$

(ii) f ফাংশনটি এক-এক ফাংশন

(iii) প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি $a \in A$ পাওয়া যাবে

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

9. যদি $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ ফাংশনটি $f = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখান যে, f এক-এক এবং অনটু।

10. যদি $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}, x \neq 1$ বর্ণিত ফাংশনের জন্য f^{-1} বিদ্যমান হয় তাহলে $f^{-1}(3)$ নির্ণয় করুন।

11. $F(x) = \dfrac{1}{x-2}$ বর্ণিত ফাংশনের জন্য-

(ক) $F(-3)$ এবং $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ নির্ণয় করুন।

(খ) ডোম F নির্ণয় করুন এবং ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ করুন।

(গ) $F\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = 0$ হলে x নির্ণয় করুন এবং $F(x)$ এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করুন।

পাঠ ১.৯ অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	লেখচিত্র

মূলপাঠ

আপনারা গণিত বই-এর ইউনিট ২, পাঠ ৫-এ কিভাবে ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করতে হয় তা শিখেছেন। এই পাঠে আমরা অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র সম্পর্কে আরও বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে। লেখচিত্র হলো ফাংশনের জ্যামিতিক উপস্থাপন। $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য 'O' বিন্দুতে পরস্পরছেদী লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' নেওয়া হয়। O কে মূলবিন্দু XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY'কে y-অক্ষ বলা হয়।

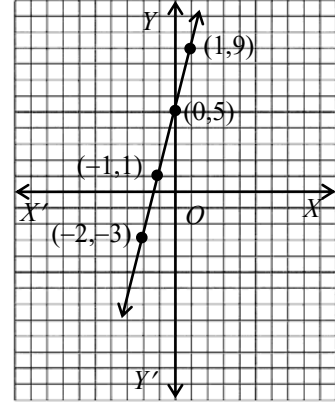
$y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য $a \leq x \leq b$ ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x এবং অধীন চলক y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করতে হয়। অত:পর তালিকার সীমিত সংখ্যক বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করতে হয়। প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করলে $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে, সরলরৈখিক (Linear) ফাংশন, দ্বিঘাত (Quadratic) ফাংশন এবং বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

সরলরৈখিক ফাংশন: সরল রৈখিক ফাংশন এর সাধারণ রূপ হলো $f(x) = mx + c$ যেখানে, m এবং c বাস্তব সংখ্যা। এর লেখচিত্র একটি রেখা যার ঢাল হলো m এবং y অক্ষের ছেদক c ।

এখন মনে করুন $m = 4$ এবং $b = 5$ তাহলে ফাংশনটি দাঁড়ায় $y = f(x) = 4x + 5$

বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর নিম্নরূপ সংkষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	0	1
y	-3	1	5	9

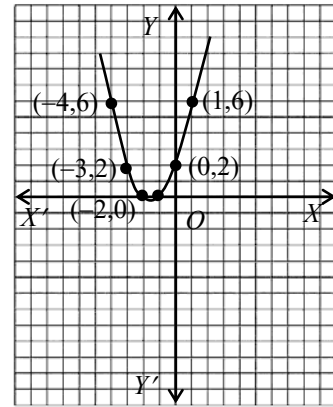
$\therefore f(x) = 4x + 5$ এর লেখ পাশের চিত্রে দেখানো হলো।

দ্বিঘাত ফাংশন (Quadratic function)

দ্বিঘাত ফাংশন হলো একটি ফাংশন যা $y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত যেখানে a, b এবং c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$.

প্রদত্ত ফাংশনে ধরুন, $a = 1, b = 3, c = 2$

তাহলে $y = ax^2 + bx + c$ কে লেখা যায় $y = x^2 + 3x + 2$

বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর সংশিষ্ট মান পাওয়া যায়।

x	$x^2 + 3x + 2$	y
-4	$(-4)^2+3(-4)+2$	6
-3	$(-3)^2+3(-3)+2$	2
-2	$(-2)^2+3(-2)+2$	0
-1	$(-1)^2+3(-1)+2$	0
0	$(0)^2+3(0)+2$	2
1	$(1)^2+3(1)+2$	6

ইহা নির্ণেয় দ্বিঘাত ফাংশন-এর লেখচিত্র।

বৃত্তের লেখচিত্র: p, q ও r ধ্রুবক এবং $r \neq 0$ হলে R এ $S = \{(x, y): (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2\}$ অন্বয়ের লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ r।

ছক কাগজে (p, q) বিন্দু পাতন করে ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করে লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

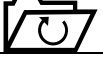
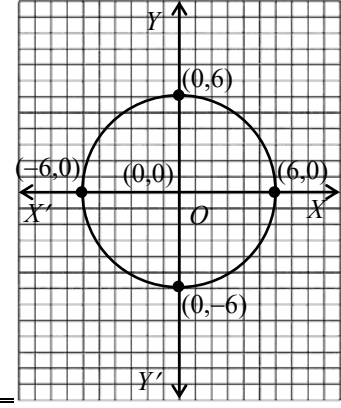
মন্তব্য: যে অন্বয়ের সমাধান সেট অসীম, এর লেখচিত্র অংকনের স্বীকৃত পদ্ধতি হলো যথেষ্ট সংখ্যক সমাধানের প্রতিরূপী বিন্দু ছক কাগজে পাতন করে সাবলীলভাবে ঐ সব বিন্দু যোগ করা, যাতে অন্বয়টির লেখচিত্রের ধরণ দ্ব্যর্থহীনভাবে বোঝা যায়। কিন্তু যে অন্বয়ের লেখচিত্র বৃত্ত, এর জন্য কম্পাস ব্যবহার করলে কাজ সহজ ও সুন্দর হয় বিধায় শেষোক্ত পন্থা অবলম্বন করা হলো।

উদাহরণ 1: $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 49\}$এর লেখচিত্র অংকন করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 36\}$

বা, $x^2+y^2=6^2$

সুতরাং S এর লেখচিত্র একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r=6$.

S এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হলো।

সারসংক্ষেপ

- $y=f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য 'O' বিন্দুতে পরস্পরছেদী লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' নেওয়া হয়। O কে মূলবিন্দু XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY'কে y-অক্ষ বলা হয়।
- $y=f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য $a\le x\le b$ ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x এবং অধীন চলক y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করতে হয়।
- অত:পর তালিকার সীমিত সংখ্যক বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করতে হয়।
- প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করলে $y=f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৯

1. $y=2x$ ফাংশনের লেখচিত্র কিরূপ হবে?
   (ক) সরলরৈখিক (খ) বক্রাকার (গ) বৃত্তাকার (ঘ) উপবৃত্তাকার
2. $x^2+y^2=4$ ফাংশনের লেখচিত্র কিরূপ হবে?
   (ক) সরলরৈখিক (খ) বৃত্তাকার (গ) উপবৃত্তাকার (ঘ) কোনটিই নয়
3. $y=x^2+4x+1$ ফাংশনের লেখচিত্র কিরূপ হবে?
   (ক) সরলরেখা (খ) বৃত্ত (গ) পরাবৃত্ত (ঘ) অধিবৃত্ত

নিচের তথ্যের আলোকে ৪-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দিন:

$S=\{(x,y):x^2+y^2=16\}$

4. S ফাংশনের লেখচিত্র কিরূপ হবে?
   (ক) সরলরেখা (খ) বৃত্ত (গ) পরাবৃত্ত (ঘ) অধিবৃত্ত
5. S অন্বয়ের বর্ণিত সমীকরণের কেন্দ্রের স্থানাংক কত?
   (ক) $(0,1)$ (খ) $(0,-1)$ (গ) $(0,0)$ (ঘ) $(1,1)$
6. অন্বয়ের লেখচিত্র অংকন করুন এবং অন্বয়টি ফাংশন কি না তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় করুন যেখানে-
   (ক) $S=\{(x,y):x+y=1\}$ (খ) $S=\{(x,y):2x+3y=4\}$
   (গ) $S=\{(x,y):x=-2\}$ (ঘ) $S=\{(x,y):x^2+y^2=9\}$
   (ঙ) $S=\{(x,y):x^2+y^2=25\}$ (চ) $S=\{(x,y):y=x^2-4x-1\}$

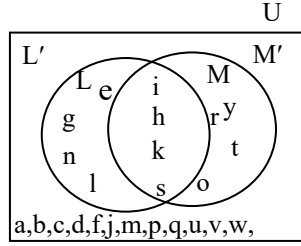
উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.১

1. (ক) $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A'=\{9,10,11,12\}$

(খ) $B = \{2,4,6,8,10,12\}$, $B' = \{1,3,5,7,9,11\}$
(গ) $C = \{6,7,8,9,10,11,12\}$, $C' = \{1,2,3,4,5\}$
(ঘ) (i) সত্য (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) মিথ্যা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.২

1. (ক)

(খ) $L \cup M = \{e, g, h, i, k, l, n, o, r, s, t, y\}$ (গ) $L \cap M = \{h, i, k, s\}$

(ঘ)

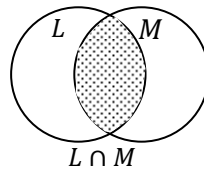
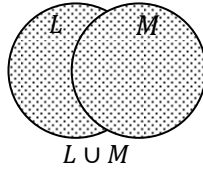
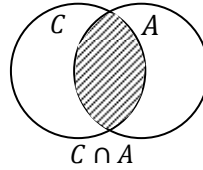
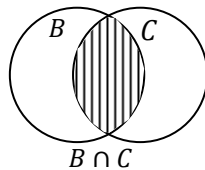
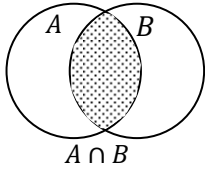
$L \cup M$

$L \cap M$

2. (ক) $A \cap B = \{r, s\}$, $B \cap C = \{s, t\}$, $C \cap A = \{s\}$

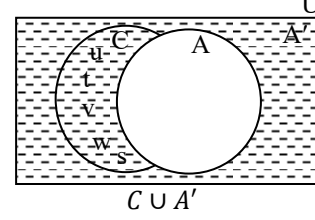
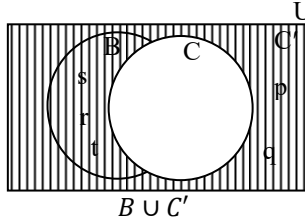
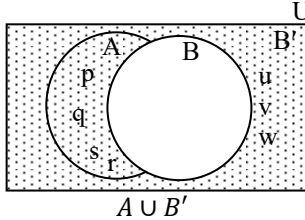
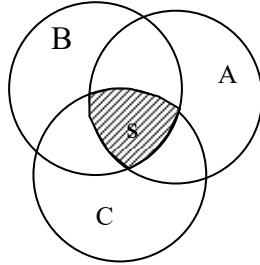
$A \cap B$

$B \cap C$

$C \cap A$

(খ) $A \cup B' = \{p, q, r, s, u, v, w\}$, $B \cup C' = \{p, q, r, s, t\}$ এবং $C \cup A' = \{s, t, u, v, w\}$

$A \cup B'$

$B \cup C'$

$C \cup A'$

(গ) $A \cap B \cap C = \{s\}$

(ঘ) $n(A \cup B') = 7$, $n(C \cap A) = 1$, $n(C \cap A') = 5$ এবং $n(A \cap B \cap C) = 1$

3. (ক) $A \cap B = \{4,9\}$

$A \cap B$

$A \cap B$

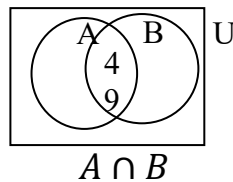
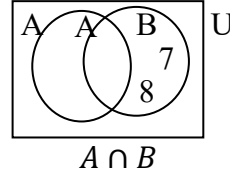
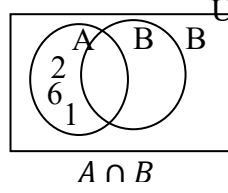
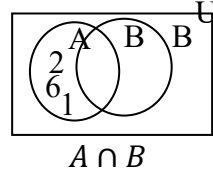
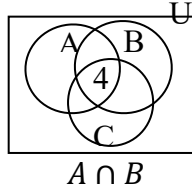
(খ) $A' \cap B = \{7,8\}$

$A \cap B$

(গ) $A \cap B' = \{2,6,10\}$

$A \cap B$

(ঘ) $A' \cap B' = \{1,3,5\}$

$A \cap B$

(ঙ) $A \cap B \cap C = \{4\}$

(চ) $n(A \cup B') = 7$, $n(C \cap A) = 1$, $n(C \cup A') = 5$, $n(A \cap B \cap C) = 1$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৪

1. ক   2. খ   3. গ   4. ঘ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৫

1. ঘ   2. গ   3. ঘ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৬

1. 4, 13   2. 40, 15   3. 8   4. (ক) 20, (খ) 63, (গ) 14

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৭

1. ঘ   2. খ   3. খ   4. গ   5. খ

6. ডোম $S = \{0,1,3\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{1,-2,2,-3\}$, ফাংশন নয়

7. (ক) $S = \{(-1,2),(0,1),(1,0),(2,-1)\}$, ফাংশন, ডোম $S = \{-1,0,1,2\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{2,1,0,-1\}$

(খ) $S = \{(-1,0),(0,0),(1,1)\}$, ফাংশন, ডোম $S = \{-1,0,1\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{1,0\}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৮

1. খ   2. গ   3. খ   4. ক   5. ঘ   6. ক   7. ক   8. ক

10. 5   11. (ক) $F(-3) = -\frac{1}{5}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}$ (খ) ডোম $F = \{x \in R : x \neq 2\}$, F এক-এক ফাংশন

(গ) $x = 2$, $F^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৯

1. ক   2.খ   3. গ   4. খ   5. গ

6. (ক) ফাংশন (খ) ফাংশন (গ) ফাংশন নয় (ঘ) ফাংশন (ঙ) ফাংশন (চ) ফাংশন